PHÂN TÍCH, PHÁT TRIỂN MỘT SỐ CÂU HỎI TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2020 -2021

Chúng ta thấy rằng, kể từ khi Bộ Giáo dục và Đào tạo chuyển môn Toán trong Kì thi THPTQG từ hình thức tự luận sang hình thức trắc nghiệm đã thay đổi nhiều cách dạy của thầy (cô) và cách học của trò. Đặc biệt là khi có đề thi minh họa TNTHPT 2020-2021, trong đề thi có nhiều điểm mới, trong đó nổi bật là các bài toán ở mức độ vận dụng và vận dụng cao. Điều này làm trăn trở nhiều thầy cô dạy toán trong việc tìm hiểu phương pháp dạy, tìm hiểu các dạng toán trắc nghiệm đặc biệt là phát triển các bài toàn theo đề minh họa để làm nguồn tài liệu phục vụ giảng dạy và hệ thống bài tập cho học sinh rèn luyện.

Từ năm học 2019 - 2020, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã điều chỉnh tên kì thi trung học phổ thông quốc gia (THPTQG) thành kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông (TNTHPT) và nhấn mạnh mục đích chính của kì thi là để xét công nhận tốt nghiệp trung học phổ thông (THPT) và đề thi năm nay 2020-2021 cũng đảm bảo bám sát mục tiêu này.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 diễn ra trong hai đợt. Bài thi môn Toán cả hai đợt năm nay nhìn chung về mức độ tương đương nhau; nội dung đề thi nằm trong chương trình cấp THPT, chủ yếu là chương trình lớp 12, đảm bảo kiến thức cơ bản để xét tốt nghiệp THPT và có độ phân hóa phù hợp để các cơ sở giáo dục đại học, giáo dục nghề nghiệp lấy kết quả thi để xét tuyển sinh. Đề thi bám sát cấu trúc và dạng thức của đề thi tham khảo (31/3/2021) và tuân thủ đúng cấu trúc mà Bộ Giáo dục và đào tạo đã công bố bao gồm 50 câu hỏi với thời gian làm bài 90 phút và phù hợp với tình hình ôn tập trong giai đoạn dịch bệnh. Trong đó, 90% câu hỏi (45 câu) thuộc chương trình của lớp 12 và 10% số câu hỏi (5 câu) thuộc chương trình lớp 11.

Đề thi gồm 24 mã đề được sinh ra từ 4 mã đề gốc 101,102,103,104. Các mã đề gốc có nội dung tương tự nhau, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11 , lớp 12 ; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 45 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, từ câu 46 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT. Học sinh có học lực khá, giỏi; có kỹ năng phân tích, tổng hợp, tính toán, liên hệ hệ tốt với các kiến thức nội bộ toán học thì mới có thể hoàn thành tốt bài thi. Để có cái nhìn một cách toàn diện về đề thi môn Toán cả hai đột năm 2021, bên cạnh việc chỉ ra những kiến thức cơ bản vận dụng, những kỹ năng cần thiết để trả lời nhanh câu hỏi trắc nghiệm và chỉ ra những sai lầm mà các em thường gặp khi giải toán. Thầy cô giới thiệu với các em học sinh bài viết: "Phân tích, phát triển một số câu hỏi trong đề thi tốt nghiệp THPT năm 2021".

Hy vọng, bài viết sẽ giúp các cái nhìn toàn diện về bài thi môn Toán năm 2021, đồng thời giúp các em có tài liệu tham khảo ôn thi TNTHPT năm 2022 và rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm bài thi môn Toán.

Trong nội dung bài viết này, chúng tôi tập trung phân tích và phát triển một số câu hỏi thuộc mức độ vận dụng trong các đề thi vừa qua.

Câu 39. (Câu 39 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101).

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_0^{-1} f(x)\mathrm{d}x+2\int\limits_0^{2} f(x)\mathrm{d}x=F(-1)-F(0)+2F(2)-2F(0)$.

Do đó $I=F(-1)+2F(2)-3F(0)=F(-1)+2F(2)-6\Rightarrow F(-1)+2F(2)=I+6$.

Mà $\int\limits_0^{-1} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^{0}\left(3x^2+4\right)\mathrm{d}x=-5$ và $2\int\limits_0^{2} f(x)\mathrm{d}x=2\left(\int\limits_0^{1}\left(3x^2+4\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^{2}\left(2x+5\right)\mathrm{d}x\right)=26$.

Suy ra $I=26-5=21$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=21+6=27$.

Nhận xét:

Đây là câu hỏi yêu cầu tính giá trị của biểu thức chứa các giá trị của nguyên hàm tai một điểm. Khó khăn mà học sinh gặp phải trong câu hỏi này là hàm số cho bởi nhiều công thức và xác định hằng số C của nguyên hàm thỏa mãn yêu cầu giả thiết của bài toán. Để giải quyết câu hỏi này trước tiên học sinh phải có kỹ năng thành thao tính nguyên hàm và mấu chốt để giải quyết câu hỏi này là tìm hằng số C thỏa mãn giả thiết của câu hỏi thông qua tính chất liên tục của hàm số đã cho tại điểm $x=1$.

- Môt số sai lầm học sinh thường gặp khi giải câu này là: Thứ nhất, sau khi tim được hàm số $F(x)$ học sinh thay cả hai giá trị $-1;2$ vào công thưc $F(x)=x^3+4x+2$ hoặc thay hai giá trị $-1;2$ vào hai công thức ngược lại sẽ dẫn đến chọn đáp án D. Thứ hai, khi tìm hàm số $F(x)$ không sử dụng tính chất liên tục của hàm số $F(x)$ tại điểm $x=1$ nên tìm được $F(x)=\begin{cases}x^2+5x+2 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$, sẽ dẫn đến chọn đáp án B.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2-2x-1 & \text{khi } x\ge 2\\ 2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Gọi F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(1\right)=4$. Giá trị của $2F\left(0\right)-3F\left(3\right)$ bằng

A. 65. **B.** 57. **C.** -61. **D.** -69.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-3x+1 & \text{khi } x>0\\ 1-x^2 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(-2\right)=\dfrac{5}{3}$. Giá trị của $F\left(-4\right)+4F\left(3\right)$ nằm trong khoảng nào?

A. $\left(52;53\right)$. **B.** $\left(53;54\right)$. **C.** $\left(54;55\right)$. **D.** $\left(55;56\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x-1 \text{khi } x\le 3\\ -4x+32 \quad \text{khi } x>3\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)=4$. Giá trị của $3F(-2)-F(4)$ bằng

A. -69. **B.** -25. **C.** -45. **D.** -53.

Câu 40. (Câu 40 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right).\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Điều kiện: $x>-25\ (*)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}3^{x^2}-9^x\ge 0\\ \log_3(x+25)-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\ge 3^{2x}\\ \log_3(x+25)\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 2x\\ x+25\le 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x=2\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $x\in(-25;0]\cup\{2\}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-24;-23;...;1;0;2\}\Rightarrow$ có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}3^{x^2}-9^x\le 0\\ \log_3(x+25)-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\le 3^{2x}\\ \log_3(x+25)\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 2x\\ x+25\ge 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2\ (tm).$$

Kết hợp các trường hợp, ta có tất cả 26 giá trị nguyên của của x thỏa mãn đề.

Nhận xét:

Đây là câu hỏi giải bất phương trình tích chứa biểu thức mũ và logarit. Đề giải bất phương trình tích $f(x)\cdot g(x)\le 0$ thông thường ta lập bảng xét dấu $f(x)\cdot g(x)$. Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình. Trong quá trình xét dấu, học sinh cần lưu ý đến tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Hoặc có thể tiếp cận cách giải khác chia các trường hợp của $f(x)$ sau khi đã nêu điều kiện xác định của BPT: $f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)\le 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}f(x)<0\\ g(x)\ge 0\end{cases}$.

- Một số sai lầm học sinh thường gặp khi giải câu này là: Thứ nhất, không tìm điều kiện xác định của bất phương trình, sau khi giải sẽ chọn đáp án B; Thứ hai, dựa vào bảng xét dấu không lấy nghiệm của bất phương trình tại các điểm dấu bằng của bất phương trình xảy ra, dẫn đến chọn đáp án A hoặc D.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(8^x-2^{x^3+2}\right).\left[\log_{\sqrt{3}}(2x+21)-4\right]\ge 0$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-3^x.9^{x+1}\right)\left(\log_2(2x-18)-5\right)\le 0$?

A. 1 **B.** Vô số. **C.** 17. **D.** 16.

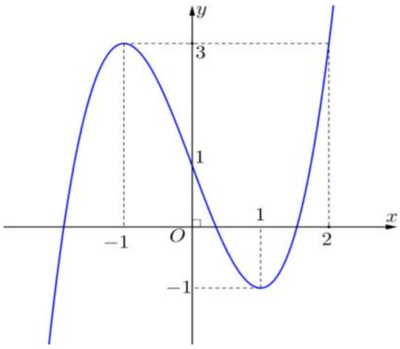
Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_3(x+25)-2}.\left(2^{x^3}-2^{-x}.4^{3-2x}\right)<0$?

A. 1 **B.** 18. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-27^x\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x+2022\right)+1\right]\geq 0$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 5. **D.** 4.

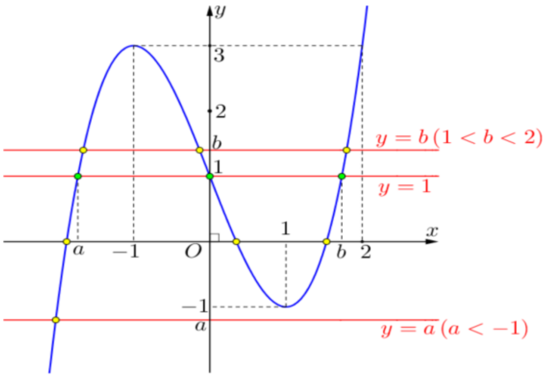
Câu 41. (Câu 40 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101) Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 7.

Lời giải



Căn cứ vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\ \left(a<-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=b\ \left(1<b<2\right)\end{array}\right..$$

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

+ Với $a<-1$, phương trình $f\left(x\right)=a$ có 1 nghiệm.

+ Phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

+ Với $1<b<2$, phương trình $f\left(x\right)=b$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm của các phương trình $f\left(x\right)=a$; $f\left(x\right)=0$; $f\left(x\right)=b$ là các nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực phân biệt.

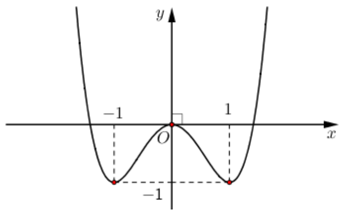
Nhận xét:

- Đây là câu hỏi quy về xét sư tương giao giữa đồ thị của hàm hợp của hàm số bậc 3 chưa xác định (hàm hợp của hàm ẩn) $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ và đường thẳng $y=k$, trong đó k là hằng số cho trước và đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ cũng cho trước. Để giải câu hỏi này học sinh phải nắm vững bài toán tương giao; có kỹ năng quan sát để xác định hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=k$.

- Một số sai lầm thường gặp khi học sinh giải câu này là: Thứ nhất, quy việc tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ tương đương với số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$, dẫn đến chọn đáp án B. Thứ hai, thiếu kỹ năng lập luận nên ngộ nhận mỗi phương trình (1), (2), (3) đều có 3 nghiệm phân biệt dẫn đến chọn đáp án A.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ là

A. 9. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(4x^2-2x^4\right)=1$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 42. (Câu 43 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2\left(m+1\right)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $\left|z_o\right|=7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (1) có $\Delta'=2m+1$.

+Trường hợp 1: $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=7$ suy ra $z_o=7$ hoặc $z_o=-7$.

Nếu $z_o=7$ suy ra $49-14(m+1)+m^2=0\Leftrightarrow m^2-14m+35=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7+\sqrt{14}\\ m=7-\sqrt{14}\end{array}\right.$, (chọn).

Nếu $z_o=-7$ suy ra $49+14(m+1)+m^2=0\Leftrightarrow m^2+14m+63=0$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $z_o=z_1=\overline{z_2}$.

Suy ra $|z_o|=7\Leftrightarrow z_o.\overline{z_o}=49\Leftrightarrow z_1.z_2=49\Leftrightarrow m^2=49\Leftrightarrow m=\pm 7$.

Kết hợp điều kiện $m<-\dfrac{1}{2}$ suy ra $m=-7$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Nhận xét:

- Đây là câu hỏi quen thuộc tìm các giá trị của tham số m để phương trình bậc hai với hệ số thực có nghiệm phức thỏa mãn điều kiện cho trước. Để giải giải quyết câu hỏi này trước tiên học sinh cần tính biệt thưc Δ; xét hai trường hopp $\Delta\ge 0, \Delta<0$, đồng thời lưu ý khai thác điều kiện $|z_0|=7$ và nếu z_0 là một nghiệm phức của phương trình đã cho thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm của nó để giải quyết trường hợp $\Delta<0$.

- Một số sai lầm thường gặp khi học sinh giải câu này là: Thứ nhất, chi xét trường hợp phương trình có nghiệm thực thỏa mãn điều kiện, tù đó chọn đáp án A. Thứ hai, không xét truòng hợp phương trình có nghiệm thực thỏa mãn điều kiện, từ đó chọn đáp án C. Thứ ba, xét các các trương hợp của Δ nhưng không kiểm tra lại các giá trị của tham số tìm được, từ đó chọn đáp án D.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|^3=3|\overline{z_0}|+2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 2. Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2+2(m-1)z+m^2-3m-2=0$, $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

Câu 43. **(Câu 44 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101)** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-6-8i$ và $-i\overline{w}$.

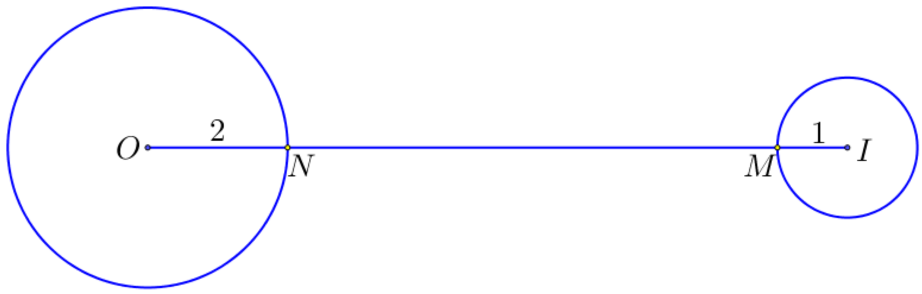
Ta có $|z|=1 \Leftrightarrow |(z-6-8i)+(6+8i)|=1 \Leftrightarrow MI=1$, với $I(-6;-8)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (T_1) tâm $I(-6;-8)$ và bán kính $R_1=1$.

Ta có $|-i\overline{w}|=|-i|.|\overline{w}|=2$. Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm O và bán kính $R_2=2$.

Ta có $P=|z+i\overline{w}-6-8i|=MN$.

$\Rightarrow \min P = OI-R_1-R_2=10-1-2=7$ (do (T_1) và (T_2) rời nhau).



Đạt được khi $\begin{cases} \overrightarrow{OM}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(-\dfrac{27}{5};-\dfrac{36}{5}\right) \\ N\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-6-8i=-\dfrac{27}{5}-\dfrac{36}{5}i \\ -i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i \\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i \end{cases}$

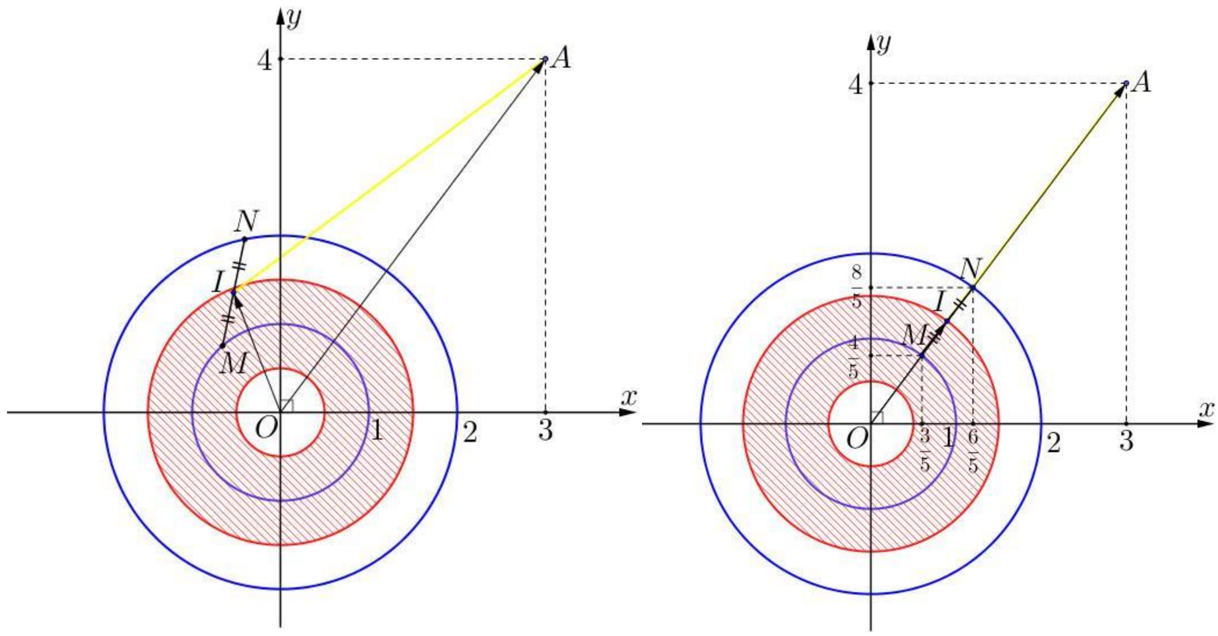
Vậy $|z-w|=\left|-1-\dfrac{2}{5}i\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Cách 2: Ta có $|w|=2 \Rightarrow |i\overline{w}|=2$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn của các số phức $z, i\overline{w}$ và $A(3;4)$.

Khi đó $|z+i\overline{w}-6-8i|=\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-2\overrightarrow{OA}\right|=2\left|\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}\right|=2AI$, với I là trung điểm MN.

Do M, N thuộc hai đường tròn tâm O, bán kính 1 và 2 nên I thuộc hình vành tròn được giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3}{2}$.



Suy ra AI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ O,M,N,A thẳng hàng.

Khi đó $M\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right),N\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\ i\overline{w}=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\ w=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\end{cases}$

Vậy $|z-w|=\left|-1-\frac{2}{5}i\right|=\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Nhận xét:

Đây là câu hỏi tìm môđun của số phức hay, có nhiều các giải khác nhau, tùy khả năng và thói quen, người giải có thể lựa chọn phương pháp khác nhau để giải bài toán. Để giải quyết câu hỏi này yêu cầu học sinh phải nắm vững ý nghĩa hình học, môđun của số phức, các tính chất hình học.

Mấu chốt trong lơi giải trên là sử dụng tính chất: Nếu M_1,M_2 lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1,z_2 thì $|z_1-z_2|=M_1M_2$ và khéo léo trong việc biểu diễn $|z+i\overline{w}-6-8i|=MN$ thông qua giả thiết $|z|=1,|w|=2$. Khó khăn mà học sinh gặp phải khi đi giải câu này là không thiết lập được mỗi liên hệ giữa giả thiết và kết luận của câu hỏi để chuyển yêu cầu của câu hỏi đã cho về bài toán thường gặp.

Ngoài cách tiếp cân lời giải câu hỏi trên, có thể sử dụng bất đẳng thức đại số để giải câu hỏi này.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z_2}+i|=2$. Khi biểu thức $P=|2z_1+3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1-2z_2|$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Khi $|z^2-wz-4|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z|+|w|$ bằng

A. $2+\sqrt{5}$. **B.** $2\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $1+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}-2$.

Câu 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|i z_2-2-i|=6$. Khi $T=|2i z_1+z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5629}}{13}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\dfrac{\sqrt{2259}}{13}$.

Câu 4. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-i|=\sqrt{5}$ và $|z_2-1+i|=|\overline{z_2}-5+i|$. Khi $T=|z_1-i z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì phần thực của z_1+5z_2 bằng

A. 19. **B.** 21. **C.** -18. **D.** 5.

Câu 44. **(Câu 46 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm m,n và $\begin{cases} g(m)=-3 \\ g(n)=6 \end{cases}$.

Xét phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Rightarrow g(x)+6-f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=n \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\left|\int_m^n\left(1-\frac{f(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{g'(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\ln|g(x)+6|\Big|_m^n\right|=\left|\ln|g(n)+6|-\ln|g(m)+6|\right|=|\ln 12-\ln 3|=\ln 4=2\ln 2.$$

Nhận xét:

- Đây là câu hói khá lạ với học sinh về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cho bởi hàm số chưa xác định công thức (hay còn gọi là hàm ẩn) và đường $y=1$. Học sinh khá lúng túng khi giải quyết câu này, bởi thông thường học sinh sẽ xác định hàm ẩn thông qua giả thiết. Từ đó đưa về bài toán quen thuộc.

Để giải quyết bài toán này học sinh phải nhớ công thúc tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường; thiết lập phương trình hoành độ giao điểm, biến đổi và thiết lập liên hệ nó với biểu thức $g'(x)$ để tìm cận; Biến đổi công thức tính diện tích hình phẳng về bài toán tính tích phân quen thuộc.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x)=f(x).\mathrm{e}^{-x}$ có hai giá trị cực trị là 5 và -3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$ và $h(x)=(2ax+b).\mathrm{e}^{-x}$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** e^5-e^{-3}. **D.** e^5-e^3.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$ có ba giá trị cực trị là -14; 4; 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+24}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 5$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=3x^3+bx^2+cx+d$ với $b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -12; 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+18}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 6$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\ln 5$.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ và $g(x)=cx^2+dx+3$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{45}{5}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{99}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị (C), đường thẳng $y=mx+n$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 (với a, b, c, m và n là các số thực). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x^2-1)2^{f(x)-mx-n}$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{15}{16.\ln 2}$. **B.** $\dfrac{15}{16}$. **C.** $\dfrac{5}{16}\ln 2$. **D.** $\dfrac{5}{16.\ln 2}$.

Câu 45. **(Câu 47 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{9x}$?

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

+) Ta có $(1)\Leftrightarrow 3x^2+xy=\log_{27}(1+xy)+9x$

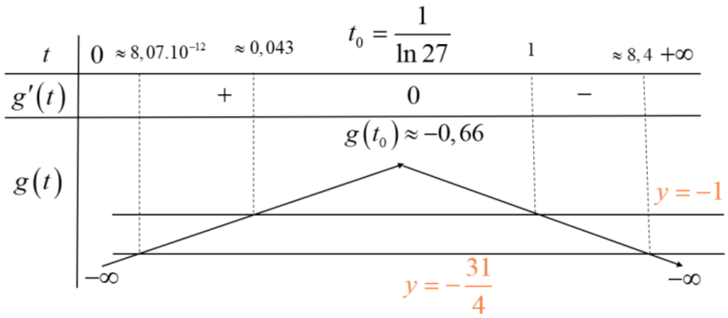
$\Leftrightarrow 3x^2-9x-1=\log_{27}t-t$, với $t=1+xy>0$.

+) Xét hàm số $f(x)=3x^2-9x-1$.

Ta có $-\dfrac{31}{4}\le f(x)<-1\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

+) Xét hàm số $g(t)=\log_{27}t-t,\ t>0$.

$g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 27}-1;\ g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\ln 27}$



Ta có $-\dfrac{31}{4}\le f(x)<-1\ \ \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$. Suy ra $-\dfrac{31}{4}\le g(t)<-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t\in\left(\approx 8,07.10^{-12};\approx 0,04\right)\\ t\in\left(1;\approx 8,4\right)\end{array}\right.$

hay $\left[\begin{array}{l}\approx 8,07.10^{-12}<1+xy<\approx 0,04\\ 1<1+xy<\approx 8,4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\approx\dfrac{-1+8,07.10^{-12}}{x}<y<\approx\dfrac{-1+0,04}{x}\\ 0<y<\approx\dfrac{7,4}{x}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-3<y<-\dfrac{1}{3}\\ 0<y\le 22\end{array}\right.$, $\left(x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)\right.$, y nguyên).

+) Nhận thấy $y=-2; y=-1$ thỏa mãn đề.

+) Với $0<y\le 22$, ta có $(1)\Leftrightarrow 3x^2-9x-1-\log_{27}(1+xy)+(1+xy)=0$.

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y, kiểm tra nghiệm $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ dẫn đến chọn $1\le y\le 9$.

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;...;9\}$ nên có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn đề.

Nhận xét:

Đây là câu hỏi liên quan đến phương trình mũ chứa hai biến, có thể là câu khó nhất của đề thi. Để giải quyết được câu hỏi này yêu cầu học sinh phải có vốn kiến thức tổng hợp như: Dựa vào giả thiết đã cho tìm cho các biến; Coi y như tham số, lấy lôgarit cơ số 27 hai vế, sau đó đưa phương trình về dạng $f(x)=0$; sử dụng phương pháp hàm số để xét hàm số $f(x)$ trên mỗi miền con của tham số y; đồng thời sử dụng các kết quả quen thuộc như:

+ Nếu f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $a\ge e$ thì hàm số $f(x)=\log_a(1+x)-x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

A. 2020. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 2019.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$ thỏa mãn $8^{2x^2+xy}=(1+xy).8^{4x}$?

A. 7. **B.** **C.** 6. **D.** 5.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên $y>5$ để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{15}(4x+3y+1)=\log_6\left(x^2-2x+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 46. **(Câu 47 đề thi TNTHPT đợt 1 mã 101)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(x-7)(x-3)(x+3)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=3\\x=-3\end{array}\right.$.

$$g'(x)=\frac{x^3+5x}{\left|x^3+5x\right|}.(3x^2+5)f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=\frac{x(x^2+5)}{\left|x^3+5x\right|}.(3x^2+5)f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right).$$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0$.

Đạo hàm không xác định tại $x=0$.

Do đó điều kiện để $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị là phương trình $f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0$ có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

$$f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+5x\right|+m=7\\\left|x^3+5x\right|+m=3\\\left|x^3+5x\right|+m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+5x\right|-7=-m\\\left|x^3+5x\right|-3=-m\\\left|x^3+5x\right|+3=-m\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0 $\Leftrightarrow -m>-7\Leftrightarrow m<7$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Nhận xét:

• Đây là câu hỏi tìm điều kiện của tham số m để hàm hợp của hàm ẩn $g(x)=f(|u(x)|+m)$ có n điểm cực trị. Để giải được câu hỏi này học sinh phải vận dụng tổng hợp nhiều kiến thức như: Các bước tìm điểm cực trị của hàm số; áp dụng cho hàm hợp chứa dấu giá trị tuyệt đối; Tính chất của hàm số chẵn, từ đó quy về bài toán tìm điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+5x+m\right)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ngoài cách tiếp cận lời giải trên, có thể giải quyết câu hỏi này bằng phép đặt ẩn phụ và khảo sát trực tiếp hàm hợp.

Phát triển câu hỏi tương tự:

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|ax^3+bx\right|+2m+3\right)$ với $a.b>0$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(|6x-5|\right)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Tài liệu tham khảo:

1. Báo toán học tuổi trẻ.

2. Sản phẩm của nhóm Strong VD-VDC.

3. Sản phẩm của nhóm Giáo viên Toán Việt Nam.

NHÓM TÁC GIẢ

Trần Xuân Thiện – Hoàng Tuấn Anh

TỔ TOÁN - TIN